954. D’Amore, B., & Duval, R, (2019). L’educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa. Quali variabili cognitive e didattiche sono coinvolte? Come si rappresenta in arte l’impossibilità? Quali elementi semiotici possono essere coinvolti nell’arte? The education of the gaze in elementary geometry and in figurative art. What are the cognitive and educational variables involved? How does art represent impossibility? What semiotic elements can we take into account be in art? *La matematica e la sua didattica*, *27*(1), 47-67.
http://www.incontriconlamatematica.net/portale/rivista/88-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica-anno-27-aprile-2019-numero-1
http://www.incontriconlamatematica.org/ita/rivista.php
https://rsddm.dm.unibo.it/la-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica/

L’educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa

Quali variabili cognitive e didattiche sono coinvolte? Come si rappresenta in arte l’impossibilità? Quali elementi semiotici possono essere coinvolti nell’arte?

The education of the gaze in elementary geometry and in figurative art

What are the cognitive and educational variables involved? How does art represent impossibility? What semiotic elements can we take into account be in art?

Bruno D’Amore[1,2] e Raymond Duval[3]

[1]*Professor titular experto, Doctorado Interinstitucional, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*

[2]*NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia*

[3]*Professore emerito Université du Littoral Côte d’Opale, Francia*

Abstract. *An apparently immediate and simple spontaneous act, as the sight, that we use to look at figures in geometry and at pictures in figurative art, reveals on the contrary unexpected complexities with remarkable consequences on the learning of geometry. In this study we suggest didactical ways to educate it. We suggest several analogies between “seeing” geometrical figures and “seeing” in figurative art. We analyse the recognition of the so-called impossible figures and we provide some examples of works of art for whose interpretation sight is not enough, but it requires a semiotic analysis (suggested by the author).*

Keywords: elementary geometry, didactic of geometry, sight, to see in geometry – to see in figurative art.

Sunto. *Un atto spontaneo apparentemente immediato e semplice, come lo sguardo, che si usa per guardare le figure in geometria o le pitture nell'arte figurativa, rivela invece complessità inattese che hanno conseguenze notevoli nell'apprendimento della geometria. In questo studio si suggeriscono modalità didattiche per educarlo. Si suggeriscono molte analogie fra il "vedere" figure in geometria e il "vedere" in arte figurativa. Si analizza il fenomeno del riconoscimento delle figure cosiddette impossibili e si danno alcuni esempi di opere d'arte per la cui interpretazione non è sufficiente lo sguardo ma si rende necessaria un'analisi semiotica (suggerita dall'autore).*

Parole chiave: geometria elementare, didattica della geometria, sguardo, vedere in geometria – vedere in arte figurativa.

Resumen. *Un acto espontaneo y aparentemente inmediato y simple, como la mirada, que se usa para observar las figuras en geometría o las pinturas en el arte figurativo, revela por el contrario una complejidad notable no esperada en el aprendizaje de la geometría. En este estudio se sugieren modalidades didácticas para ayudar a educar esta mirada. Se proponen analogías entre el "ver" figuras geométricas y el "ver" obras del arte figurativo. Se analiza el fenómeno del reconocimiento de las figuras así llamadas imposibles y se proponen algunos ejemplos de obras de arte para la interpretación de las cuales no es suficiente la mirada pero es necesario un análisis de tipo semiótico (sugerida por el autor).*

Palabras clave: geometría elemental, didáctica de la geometría, mirada, ver en geometría – ver en el arte figurativo.

1. Premessa

In questo articolo si affrontano varie problematiche relative allo sguardo che viene attivato su schizzi o disegni che rappresentano figure del mondo della geometria o opere d'arte. Questo sia per capire come esso funzioni, sia per studiarne la necessità dal punto di vista didattico.

In Duval (2018) si afferma che, di fronte a una figura geometrica che è stata "costruita", e non disegnata a mano libera, o di fronte a un'opera pittorica, "vedere" e "riconoscere" sono la stessa cosa. Sono gli stessi processi cognitivi di riconoscimento visivo che controllano lo sguardo. Così, di fronte a una figura geometrica, non è sufficiente sapere quale proprietà è data, o avere delle conoscenze su che cosa essa rappresenti, per "vedere" e poterla usare. Bisogna per prima cosa riconoscere visivamente tutte le configurazioni possibili che essa offre allo sguardo dato che, in matematica, riconoscere implica che si possa convertire spontaneamente una rappresentazione da un registro a un altro.

Di fronte a una figura geometrica o a un quadro, i processi di riconoscimento che controllano lo sguardo sono cognitivamente complessi. Questi processi non sono né quelli della percezione degli oggetti nel nostro ambiente, né quelli legati alla coordinazione dei registri. Questi processi richiedono la messa in campo di trasformazioni semiotiche specifiche dei registri di rappresentazioni bidimensionali. L'analisi comparativa dei modi di "vedere" una figura che sono necessari in geometria e di quelli necessari per vedere un quadro, ha permesso di distinguere delle operazioni cognitive comuni. Tali operazioni si basano sulle forme percepite, cioè sulle unità figurali che emergono dalla struttura geometrica della figura o dalla composizione del dipinto. Le trasformazioni puramente figurali sono come metamorfosi del riconoscimento alle quali le unità figurali possono dar luogo nello sguardo, senza che debba modificarsi ciò che viene dato a vedere sulla carta, sulla tela o sullo schermo.

Per permettere agli studenti un ingresso nel mondo della geometria (tutti gli studenti, senza alcuna eccezione), dobbiamo iniziare con l'educazione dello sguardo, prima di qualsiasi acquisizione di conoscenze, prima di qualsiasi richiesta di ragionamento, prima di qualsiasi uso di strumenti di misura e di formule per calcolare. Senza questo, continuerà ad esistere un'incomunicabilità insormontabile tra studenti e insegnanti. Perché, di fronte a una figura, gli studenti non vedono affatto la stessa cosa che vedono gli insegnanti e i matematici.

Nella prima parte del testo che segue si traccia lo schizzo programmatico di un insegnamento della geometria elementare, nel quale è l'educazione dello sguardo che introduce nel mondo della geometria.

Nella seconda parte del testo si entra più decisamente nel mondo dell'arte. In Duval (2018) si è posto in evidenza il problema del riconoscimento dell'impossibilità nella visione di una figura o di un'opera d'arte. Che cosa caratterizza tale impossibilità? Come si percepisce con lo sguardo? Attraverso esempi opportuni, si cerca di dare una risposta a queste domande. E si evidenzia in seguito come l'analisi semiotica sia necessaria nell'interpretazione di talune opere d'arte, prese a modello; e come il semplice sguardo o la semplice osservazione, priva di indicazioni interpretative semiotiche precise date dall'autore, permettano di cogliere unicamente l'immagine, ma non il senso. Una debolezza del solo sguardo che, pur restando il protagonista di questo studio, va accompagnato da conoscenza, almeno in alcune occasioni, come quelle prese a mo' di esempio.

2. Il conflitto cognitivo relativo alla geometria elementare in Primaria e in Secondaria di primo grado

Da un punto di vista matematico, la specificità della geometria elementare non è quella di introdurre figure che vediamo e possiamo costruire, ma di dover ricorrere a termini definiti per sapere che cosa esse rappresentano e per essere in grado di usare tali termini per denominare e per descrivere. In altre parole, nella geometria elementare non si dovrebbero vedere le figure a occhio nudo, si devono usare delle … lenti speciali per guardarle. Queste lenti sono le ipotesi date insieme alla figura, o talvolta senza di essa, che ne enunciano le proprietà. In questo senso, il modo in cui dobbiamo guardare le figure in geometria elementare è agli antipodi rispetto a quello con cui si guarda un quadro in un museo. Un quadro spesso non ha bisogno di parole. Ciò che offre da vedere è autosufficiente e parla il suo specifico proprio linguaggio agli occhi. (In realtà, non sempre le cose stanno così, come mostreremo più avanti).

L'insegnamento della geometria elementare in Primaria e nella Secondaria di primo grado si scontra con questa inversione della relazione cognitiva tra vedere e dire, nella quale le parole non designano più ciò che si vede. Le colonne (A) e (B) nella tabella sottostante rappresentano questo *conflitto cognitivo inerente all'attività geometrica*. E le tre frecce tra queste due colonne rappresentano il dilemma didattico che questo conflitto cognitivo comporta per l'organizzazione delle attività di apprendimento. O si parte da ciò che conta dal punto di vista matematico, e che si può solo capire e non vedere: ma allora tutto diventa inintelligibile, come è stato il caso dell'insegnamento della geometria nel periodo della cosiddetta "matematica moderna" negli anni 1970–1980. Oppure si parte dalle figure che si possono vedere, costruire, misurare e classificare, come per esempio i poligoni regolari: ma allora si traccia un divario tra una geometria empirica concreta e una geometria nella quale si risolvono dei problemi mediante micro-dimostrazioni.

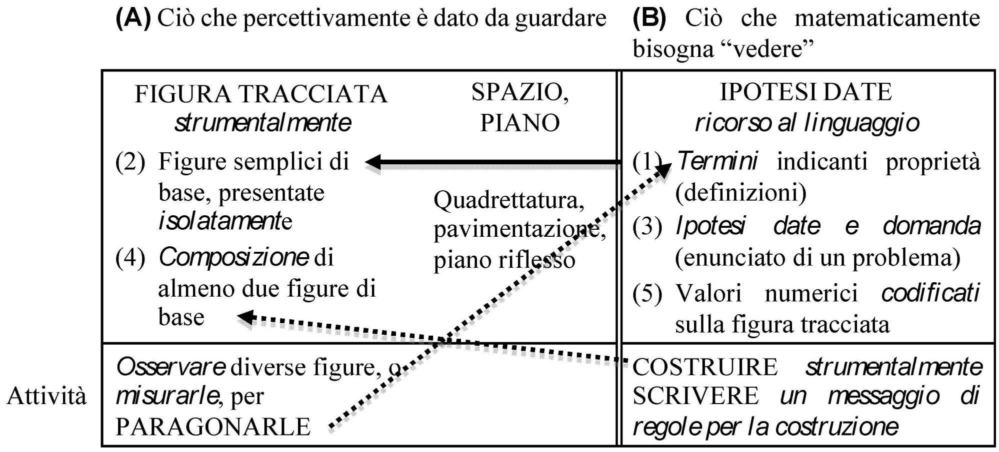

Figura 1. Schema della problematica didattica dell'insegnamento della geometria.
quiqui

Sia che si adotti l'approccio sperimentale e induttivo, o quello direttamente legato alla scoperta delle proprietà a partire da vincoli che ogni costruzione di figura richiede, l'insegnamento della geometria nella Primaria e nella Secondaria di primo grado risulta portare a un vicolo cieco. Gli studenti, in grande maggioranza:

(1) restano con la percezione di figure tracciate e con una conoscenza "botanica" (Duval, 2008, p. 55) delle figure geometriche di base: triangolo, parallelogramma, quadrato, cerchio, …;

(2) non possono uscire dal contorno chiuso della figura, nemmeno per prolungare uno dei suoi lati;

(3) non possono, per risolvere un problema, aggiungere nuove linee nella figura per evidenziare altre figure di base, cioè per scomporla e riconfigurarla;

(4) non acquisiscono o confondono i termini necessari per utilizzare le ipotesi e comprendere gli enunciati, come appare evidente nel divario, spesso considerevole, tra le produzioni degli allievi nei compiti di costruzione di figure e in quelli di scrivere o esplicitare verbalmente indicazioni per far costruire le figure (Asenova, 2018);

(5) non possono utilizzare le figure se non effettuando misure sul disegno o utilizzando dei valori numerici dati, ma non sempre riconoscono le formule di calcolo da usare tranne quelle del perimetro e dell'area dei quadrilateri.

Questi cinque ostacoli permangono lungo tutto il percorso scolare fino alle superiori.

Il blocco dell'insegnamento della geometria in Primaria e nella Secondaria di primo grado deriva dall'ignorare o trascurare il conflitto cognitivo tra il "dire" e il "vedere", che è inerente alla geometria elementare.

Due domande sono essenziali per chiarire i processi cognitivi di comprensione che sono specifici della geometria elementare:

- In che cosa consiste questo atto cognitivo, e non matematico, che chiamiamo "vedere"?
- Come può una figura tracciata visualizzare proprietà geometriche che non possono essere percepite visivamente su una figura?

3. Analisi del processo di riconoscimento visuale come prerequisito per "capire" in geometria elementare

Dal punto di vista cognitivo, *"vedere" è riconoscere una forma a colpo d'occhio* grazie al contorno chiuso o al colore che la evidenzia, come "figura", da uno sfondo rispetto ad altre forme. *Questo riconoscimento visivo* si fonde con il riconoscimento cognitivo dell'oggetto la cui forma è la sua sagoma caratteristica. Ma le due cose sono tra loro indipendenti. Quindi, quando si guarda un dipinto in un museo, il riconoscimento cognitivo di ciò che vi è dipinto è spesso inutile: esso può anche addirittura costituire un ostacolo per l' "ascolto visivo" del quadro.

Vedere, dunque, è in generale un processo automatico che non mette in campo apparati cognitivi, un puro atto sensibile; ma in geometria questo processo acquista un ruolo determinante nell'ambito dell'apprendere o dell'agire scolastico, bisogna non solo "vedere", ma anche "saper vedere" grazie a un opportuno allenamento cognitivo, il che significa distinguere, riconoscere, stabilire, mettere in relazione, …; mentre nel mondo dell'arte figurativa "vedere" può coincidere con riconoscere in certe espressioni dell'arte figurativa, ma soprattutto interpretare sulla base di conoscenze specifiche, altre modalità artistiche (astrattismo informale, surrealismo, arte analitica, cinetica, …).

Le colonne I, II e III dello schema seguente rappresentano il processo cognitivo dell'atto di riconoscimento visivo dei contorni chiusi 2D, a colpo d'occhio, indipendentemente da ogni ipotesi data, cioè prima di ogni riconoscimento cognitivo degli oggetti che essi rappresentano. La colonna I richiama l'analisi gestaltica del processo cognitivo di riconoscimento visivo. La colonna II introduce la nozione centrale per analizzare questo processo, quello di unità figurale. *Un'unità figurale è caratterizzata dal suo numero di dimensioni nD*, e dal numero di dimensioni del suo supporto materiale, 2D o 3D, che permette di distinguere le figure e i modelli. Sono le unità figurali che si vedono e si riconoscono a colpo d'occhio. Infine, la colonna III evidenzia un salto tra le unità figurali *n*D immediatamente riconosciute e *tutte le unità figurali nD possibili* che possono essere riconosciute visivamente.

Per la geometria piana e per la pittura, tutte le unità figurali sono ovviamente unità 2D/2D. Questo processo cognitivo di riconoscimento visuale è lo stesso, sia che si guardi una figura geometrica o un dipinto. *Il potere euristico delle figure e la creazione dei dipinti risiedono nell'attività dello sguardo che li esplora o che li contempla, e non nell'assemblaggio di contorni chiusi o di superfici che costituiscono la figura tracciata o il dipinto.*

PRIMO COLPO D'OCCHIO → su ciò che è dato a vedere		LO SGUARDO	DENOMINARE PER DEDURRE
I. FORMA TRACCIATA E PERCEPITA	II. UNITÀ FIGURALE *n*D/(2D o 3D)	III. TUTTE LE UNITÀ FIGURALI *n*D POSSIBILI	IV. LINGUAGGIO MATEMATICO
Un contorno chiuso *che si stacca da un fondo* (neutro, quadrettato o da un insieme di altre forme)	*n*D: *numero di dimensioni dell'unità figurale* (2D): *dimensione del supporto* schermo o carta, e (3D): modelli (plastici)	(1) *Molte più unità figurali possibili* che le unità figurali riconosciute a colpo d'occhio (2) Possibilità di guardare per *giustapposizione o sovrapposizione*	(3) *Termini* (definizioni) (4) *Ipotesi date* *Ragionamento* (non deduttivo o di calcolo)
		(1) E (2) **DECOMPOSIZIONE** *delle forme percepite* 2D, *riconfigurazioni* (3) **DECOSTRUZIONE DIMENSIONALE** *di tutte le unità figurali possibili* 3D 2D 2D 1D	SOSTITUZIONE di enunciati l'uno all'altro *in funzione di teoremi* e non associazione di parole, di idee o di immagini

Figura 2. Schema del processo cognitivo di comprensione in geometria elementare.

Il confronto tra i due schemi mostra le differenze tra il punto di vista matematico e il punto di vista cognitivo per analizzare l'acquisizione di conoscenze in geometria.

La colonna A dello schema didattico (Figura 1) è qui sostituita dalle colonne I e II che evidenziano il salto cognitivo da far effettuare agli allievi per entrare nel *modo matematico di guardare una figura, indipendentemente dalle ipotesi date.* La colonna IV si rifà alla colonna B dello schema precedente, a parte una differenza: non si tratta più di dire o di nominare per "vedere" ciò che la figura rappresenta, ma di nominare per dedurre nuove proprietà a partire da ipotesi. Ma ciò che è importante è la relazione, in ciascuno dei due schemi, tra l'ultima colonna, quella del linguaggio matematico, che non cambia da uno schema all'altro, e le colonne corrispondenti al modo di vedere le figure così come esse sono date per essere guardate. Questo rapporto è contrassegnato dalle frecce.

Lo schema della problematica didattica enfatizza allo stesso tempo sia la riduzione del "vedere" sia la sua subordinazione al linguaggio e alle grandezze senza le quali non è possibile accedere alle proprietà e agli oggetti matematici (Figura 1, freccia con linea continua da B ad A). Ma le figure, nonostante tutte le attività di costruzione, non aiutano a capirle (freccia punteggiata da B ad A). Esse sussistono come una figura-tipo associata a una parola matematica (freccia punteggiata da A a B).

Nello schema del processo cognitivo non c'è più conflitto cognitivo tra vedere e dire. Innanzitutto, la scoperta del modo di vedere matematico avviene indipendentemente dal linguaggio e da qualsiasi ipotesi. Le attività devono prioritariamente basarsi sul riconoscimento visivo delle diverse unità 2D che formano una configurazione (Figura 2, freccia orizzontale a tratto continuo). In quanto ogni figura, anche quelle indicate come "semplici" o "di base", sono configurazioni di unità figurali *n*D. Non si tratta più di costruire delle figure, ma di scomporle per riconfigurare in altro modo le unità figurali riconosciute (freccia dalla colonna IV alla III). Si noterà che nessuna freccia inizia dalle colonne II e III per arrivare alla colonna IV

Per capire in geometria elementare e per poterne usare le conoscenze, si deve imparare a vedere e guardare tutte le configurazioni *n*D/2D nel gioco delle trasformazioni visive che esse consentono (Duval, 2005). È necessario essere in grado di riconoscere spontaneamente le unità *n*D/2D per poter acquisire i concetti geometrici e risolvere problemi. "Capire" in geometria elementare è dunque sinonimo di un insieme di altri verbi: cogliere segni e tratti specifici, saper distinguere elementi segnici, riconoscere elementi specifici del disegno o della rappresentazione, talvolta cogliere il senso progressivo di una figura che si presenta come unità strutturale, far riferimento a figure analoghe, saper cogliere informazioni specifiche, …

4. I tre tipi di visualizzazione geometrica e pittorica

Vogliamo qui evidenziare tre tipi di visualizzazione che si mettono in campo sia in geometria che in pittura. I primi due tipi si basano sul riconoscimento di forme, cioè di contorni chiusi. Essi sono comuni alla geometria elementare, alla pittura e al mosaico; sono tra loro distinti sulla base dell'assenza (2D/2D) o presenza della terza dimensione (3D/2D). Il terzo tipo di visualizzazione è specifico per la geometria. Il primo tipo di visualizzazione è quello necessario per introdurre la geometria in Primaria e nella Secondaria di primo grado.

Il confronto di figure geometriche con dei quadri, consente di identificare cinque variabili cognitive per la prima visualizzazione (Duval, 2018, pp. 216–219). Sono le stesse variabili che controllano lo sguardo e l'esplorazione visiva di fronte a una figura o a un dipinto. E, in geometria, ciò è euristicamente decisivo per risolvere i problemi (Duval, 2008, p. 55, Figura 12; Duval, 2015, p. 152, Figura 2). L'obiettivo dell'educazione dello sguardo su questo primo tipo di visualizzazione è che gli studenti possano *riconoscere, in una configurazione, tutti i contorni chiusi possibili*, quelli riconoscibili per giustapposizione e quelli riconoscibili per sovrapposizione, *e che essi possano ricombinarli per ottenere diverse configurazioni. E questo deve avvenire in modo quasi riflessivo, in meno di un minuto o due.* Naturalmente, tutte le attività finalizzate a questo obiettivo *escludono la considerazione delle dimensioni*, e quindi le attività di misura e tutte le indicazioni di lunghezza relative alle unità figurali riconosciute. Il processo di riconoscimento visivo delle unità figurali è lo stesso per le configurazioni B e C di Figura 1 (Duval, 2018, p. 216). Un lavoro di osservazione sulle figure non è in verità pertinente se non nella prospettiva di un'euristica puramente visuale, altrimenti la percezione continuerà a essere la prima fonte di blocco o di errore nella risoluzione dei problemi, incluso il riconoscimento delle formule da applicare per calcolare una lunghezza o un'area.

Il secondo tipo di visualizzazione impone la messa in campo della terza dimensione. Esso è associato all'invenzione della prospettiva. Questo è un costrutto matematico che organizza il campo di visualizzazione subordinandone tutti i contorni chiusi assemblati in una stessa configurazione a dei rapporti di grandezza (Duval, 2018, p. 236, Figura 10). Ma il secondo tipo di visualizzazione è molto più ampio. Comprende qualsiasi composizione di forme 2D/2D permettendo di visualizzare una superficie in rilievo o in cavità, solidi in 3D/2D (Duval, 2018, p. 233, Figura 8). In altre parole, comprende qualsiasi visualizzazione di un oggetto *nello spazio* in funzione del lato da cui lo si guarda, e indipendentemente dalla sua posizione rispetto a tutti gli altri oggetti che si vedono nello stesso momento. La visualizzazione propria della geometria nello spazio è indipendente dalla visualizzazione basata sulla prospettiva. Essa dà luogo per i solidi alla fabbricazione di modelli 3D/3D che possono essere manipolati o sulle cui facce è possibile disegnare le intersezioni di un piano di sezione, ciò perché i ragionamenti richiedono che si ritorni a delle unità figurali 2D/2D e 1D/2D. Ma la visualizzazione di un solido nello spazio può portare alla visualizzazione di un oggetto impossibile (Duval, 2018, p. 237, Figura 11).[1] Infine, la visualizzazione del rilievo di una superficie mobilita una costruzione matematica meno complessa. Essa si basa sulla reiterazione di certe unità figurali 2D giocando sia sulle loro combinazioni che sulla loro deformazione progressiva (Duval, 2018, p. 220, Figura 3; e p. 235, Figura 9). Qui, in definitiva, è lo sguardo dell'artista che è determinante (per esempio, i colori possono essere fondamentali).

È il terzo tipo di visualizzazione che permette di rispondere alla domanda chiave per entrare nella geometria: Come può una figura tracciata visualizzare delle proprietà geometriche che non possono essere percepite visivamente su una figura? Questa domanda ribalta il problema didattico dell'insegnamento della geometria. Non si tratta di costruire delle figure, anche con strumenti che impongono di tenere conto delle proprietà geometriche della figura da costruire. Si tratta di decostruire le configurazioni 2D/2D in una rete di rette 1D/2D soggiacenti. Per disegnare questa rete di rette, è necessario non solo prolungare tutti i lati della figura, ma arricchirla con nuove rette (Duval, 2015, p. 162, Figure 6 e 7). In altre parole, l'attività di decostruzione dimensionale fa immediatamente superare gli ostacoli (2) e (3) sopra menzionati, mentre l'attività di costruzione porta, al contrario, a rafforzarli cognitivamente e a istituzionalizzarli. È solo su una rete di rette che si sono decostruite dimensionalmente che possiamo vedere le proprietà geometriche; esse si distinguono tutte visivamente come la relazione tra due unità figurali, sia della stessa dimensione sia di dimensioni diverse (Duval, 2015, p. 164, Figura 8).

Questi tre tipi di visualizzazione sono delle visualizzazioni non iconiche. Essi si oppongono alla *visualizzazione iconica*, con la quale la pittura, dall'arte parietale ai Salotti del XIX secolo, è stata a lungo confusa. Qui "vedere" un'immagine significa riconoscere a colpo d'occhio il tipo di oggetto che essa rappresenta: un volto, un animale, un fiore ecc. In altre parole, il criterio dell'iconicità è la possibilità di giustapporre il modello con la rappresentazione che la riproduce a partire da qualche traccia o da alcune macchie, e non "imitandolo". Ma questo riconoscimento non può prodursi se non a una doppia condizione: bisogna già conoscere l'oggetto rappresentato, vale a dire averne visto uno; e bisogna anche "vedere" *la somiglianza tra il contorno chiuso che*

[1] Su questo punto torneremo più avanti in modo esplicito.

è stato tracciato e il profilo dell'oggetto. Il grado di particolarizzazione e informatività dell'immagine, o del quadro, dipende allora dalla corrispondenza che può essere stabilita tra le tracce interne al contorno chiuso e i dettagli osservabili dell'oggetto rappresentato. La sovrapponibilità intuitiva dei rispettivi contorni e il grado di particolarizzazione dell'immagine sono i due criteri di somiglianza tra un disegno o un dipinto e ciò che essi rappresentano. Questi due criteri consentono così di distinguere dei *gradi di iconicità* tra la perfetta iconicità di alcuni dipinti che mostrano la "persona stessa", per esempio nel caso di un ritratto, e l'estrema generalità di uno schema che riduce l'oggetto a pochi tratti (Duval, 2018, pp. 223–225, Figure 4 e 5). In pittura, il tipo di visualizzazione basato esclusivamente sul riconoscimento di unità figurali 2D, ha portato alla rivoluzione della cosiddetta pittura "astratta". Le forme degli oggetti 3D/3D, così come lo sguardo le vede, sono scomposte in frammenti, geometrizzate o rilevanti da diversi punti di vista possibili sull'oggetto, e i frammenti scelti sono assemblati in una riconfigurazione non iconica (Duval, 2018, p. 225, Figure 6 e 7).

5. In che modo vedere una figura, un'immagine o uno schema richiama delle parole?

La risposta a questa domanda cambia radicalmente a seconda del tipo di visualizzazione e a seconda della funzione che riempie la produzione verbale. Ci limiteremo qui alla sola considerazione delle figure geometriche costruite strumentalmente.

Gli strumenti impongono, al momento della costruzione, il vincolo di alcune proprietà che li distinguono tra loro (una riga e un compasso o le istruzioni di un software), e quindi termini geometrici. A ogni modo, quando si guarda una figura per risolvere un problema, poco importa il tipo di strumento utilizzato per costruirla, la riga e il compasso o le istruzioni di un "menu", ciò che conta è il modo in cui la si guarda, indipendentemente da ogni dimensione e da ogni relazione fra dimensioni. Tra i diversi tipi di visualizzazione che abbiamo appena distinto, dal punto di vista del loro funzionamento cognitivo, solo due sono essenziali per quanto riguarda l'educazione dello sguardo in geometria.

Il primo tipo di visualizzazione matematica è quello che riguarda l'esplorazione visiva euristica delle figure, mediante la decomposizione e la riconfigurazione di unità figurali 2D. L'esplorazione visuale di una figura è precedente a qualsiasi formulazione e indipendente dalle diverse proprietà che si potrebbero assumere come ipotesi.[2] Questa esplorazione puramente visuale è più intuitiva e meno impegnativa di qualsiasi descrizione o spiegazione

[2] Per una stessa figura costruita, si possono cambiare i problemi posti, solo cambiando le ipotesi date. Dovremmo concluderne che ci sono tante figure quante sono le scelte di ipotesi possibili?

verbale, le quali d'altra parte non hanno mai insegnato a guardare le figure in modo matematico. È questa esplorazione visuale che consente di *riconoscere il teorema, la definizione o la formula pertinente per risolvere* un determinato problema assegnato. Tuttavia, come per qualsiasi attività intenzionale, lo sguardo richiede una verbalizzazione silenziosa che controlla la gestione di questa esplorazione puramente visiva e ne condensa il risultato. La caratteristica di questa verbalizzazione silenziosa, come aveva indicato Vygotskij, è che non ha bisogno di parole per designare o qualificare le unità figurali 2D che sono state scomposte e riconfigurate dallo sguardo.

Al contrario, il secondo tipo di visualizzazione, ovvero la decostruzione dimensionale delle forme, richiede una formulazione esplicita delle diverse relazioni tra due unità figurali di dimensione inferiore rispetto a quelle delle unità figurali 2D che sono state decostruite dimensionalmente. È la decostruzione dimensionale che rende possibile comprendere tutto il vocabolario geometrico di base: essa esclude qualsiasi verbalizzazione silenziosa. E l'uso del vocabolario, a differenza delle parole del linguaggio comune, non può essere usato se non nel solo ragionamento che funziona per sostituzione di enunciati e non per accumulo di "ragioni" come avviene in un'argomentazione (Figura 2, IV: denominare per dedurre). *E, nel dare senso, una figura non è mai necessaria. Basta indicare le ipotesi*! Ciò, almeno per i matematici e gli insegnanti. E questo è il miraggio che guida l'insegnamento della matematica su un sentiero senza uscita. Per i matematici e per gli insegnanti, questa formulazione esplicita basata sulla decostruzione dimensionale delle forme rileva una verbalizzazione silenziosa, tanto che essa è diventata evidente e familiare per essi. Ed essa è proiettata sull'esplorazione euristica visiva delle forme, come se entrambi i tipi di visualizzazione e il linguaggio matematico fossero cognitivamente la stessa cosa.

Questi due tipi di visualizzazione si basano sul principio della separazione di forme e dimensioni. Al contrario, la visualizzazione della terza dimensione subordina la costruzione di unità figurali 2D a delle uguaglianze di rapporti di grandezze determinate a partire da un punto di fuga. La costruzione matematica è quella di una rete di rette convergenti verso un punto di fuga, e la costruzione delle forme 2D viene eseguita su questa rete di rette in funzione dei rapporti di grandezza scelti a partire da questo punto di fuga per contrassegnarne la loro maggiore o minore distanza. Vedere una figura in questo caso significa discernere questa rete di rette, che non evoca parole ma numeri e calcoli. La visualizzazione iconica di edifici nello spazio (3D/3D) si basa sulla strutturazione preliminare del suo campo attraverso una rete di rette convergenti verso un punto situato al di sopra di una retta, la linea d'orizzonte.

In geometria, dunque, vedere e capire sono operazioni fortemente strutturalmente connesse; se capire senza vedere (in una qualsiasi forma di visione) si presenta come impossibile, il contrario è invece fenomeno assai presente: si vede come azione sensoriale un costrutto geometrico, ma non se ne sa interpretare il senso, il messaggio, dunque non si capisce; cognitivamente parlando, quel costrutto non ha il senso che il suo creatore – artefice ha inteso dargli. Vedere e capire non sono per nulla sinonimi, anzi proprio sulla loro dicotomia si creano situazioni apprenditive negative. In arte si può creare talvolta una illusione del capire, legata al vedere; ma il più delle volte, appunto, di illusione si tratta; un inesperto dì arte figurativa vede un'opera di Jackson Pollock, ma non ha sostegno nel cognitivo posseduto: vede ma non può capire il senso dell'operazione pittorica, nemmeno se ricorre a un nome, un titolo o una legenda. Ma qui, a differenza che in geometria, la parola usualmente non designa ciò che il quadro rappresenta, bensì ciò che ha ispirato il pittore o la risonanza delle cose e la luce nello sguardo di chi guarda (Duval, 2018, pp. 227–228), spesso in riferimento alla storia dell'arte, la cui conoscenza risiede nel cognitivo e non solo nella visione.

6. Come percepire, riconoscere, valutare le figure impossibili nell'arte figurativa; dallo sguardo all'analisi visiva

Come avevamo già anticipato, proseguendo nello studio iniziato in Duval (2018), ci occupiamo ora del problema del riconoscimento della impossibilità (strutturale) di una immagine 3D rappresentata prospetticamente in una superficie 2D. In questo caso, il semplice sguardo non sembra più essere sufficiente, né servono confronti fra grandezze, definizioni o conoscenza di termini.

Per rendere lo studio più efficace, ricorreremo ad esempi tratti dall'arte figurativa contemporanea; molti altri esempi, anche assai più datati, si possono rintracciare in D'Amore (2015a).

A partire dal 1934, l'allora giovane pittore svedese Oscar Reutersvärd si dedicò al disegno di "figure impossibili" (questa la sua denominazione originale) tra le quali spicca fin dall'inizio il cosiddetto "triangolo dei Penrose", dunque assai prima del 1958 (D'Amore, 2000, 2002, 2015a). Ciò nulla toglie al fatto che, mentre l'artista rappresentava l'impossibile geometrico per puro gusto estetico e per affinare una sensibilità prospettica personale, i Penrose studiarono per primi la psicologia connessa con la visione umana di questa forma 2D che allude ad una 3D impossibile (Penrose & Penrose, 1958). L'artista svedese però si dedicò soprattutto a una sorprendente diversa versione, famosissima, costituita da cubetti in prospettiva (D'Amore, 2005).

Figura 3. *Opus 1*, Oscar Reutersvärd, 1934.
Lo sguardo coglie l’impossibilità globale con maggiore difficoltà rispetto al classico triangolo impossibile dei Penrose, forse a causa della frammentazione delle componenti e alla difficoltà di coordinare lo sguardo sottoposto a molteplici suggerimenti visivi; i tre componenti laterali, quelli che nel triangolo impossibile sarebbero i tre “lati”, ciascuno dei quali (isolatamente) possibile, sono qui costituti da 4 cubetti, ciascuno dei quali correttamente rappresentato dal punto di vista prospettico. Si può eliminare il cubetto centrale e studiare quel che resta della proposta dell’artista.

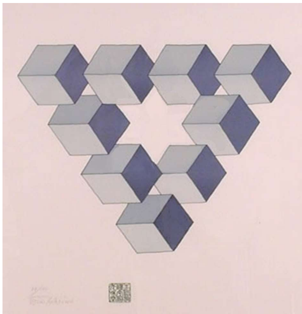

Figura 4. Elaborazione di *Opus 1*, Oscar Reutersvärd.

Lo sguardo viene come catturato dalla illusoria stella a 6 punte che sembra apparire al centro e il linguaggio silenzioso commentarla mentalmente, descriverla; nel corso del secondo sguardo, tale immagine si impone, come faceva notare lo stesso artista.

A questo punto si può compiere un’operazione grafica di estremo interesse: eliminare uno alla volta i tre lati-cubetti del triangolo-cubetti, per restituire alle tre diverse componenti del disegno un’accettabile coerenza dal punto di vista prospettico (D’Amore, 2015a, p. 458).

Figura 5. Elaborazioni di *Opus 1*, Oscar Reutersvärd: ciascuna di esse è prospetticamente accettabilmente corretta.
La "giustapposizione grafica" di tre figure prospetticamente accettabilmente corrette (anche se non perfette) è una figura prospetticamente impossibile.

In questa analisi di un'opera d'arte si evidenzia bene che ruolo hanno gli sguardi, o meglio, la loro concatenazione; e come sia importante il cosiddetto colloquio silenzioso.

7. Il ruolo esplicito della semiotica nell'analisi di un'opera d'arte, secondo le intenzioni dell'autore: quando lo sguardo non è più sufficiente a capire quel che vede

Ricordiamo la celeberrima opera *Ceci n'est pas une pipe* che il geniale pittore belga, spesso etichettato "surrealista", René Magritte realizzò in diverse versioni tra il 1929 e il 1946.[3]

Figura 6. La trahison des images, René Magritte, 1928-1929. Los Angeles County Museum of Art, Los Angeles.

Riguardo al titolo, destinato a stupire il visitatore, per quanto l'immagine della pipa sia iconicamente perfetta, non c'è coincidenza fra l'oggetto rappresentato

[3] Per un'analisi storica, critica, semiotica e artistica di questa operazione pittorica, si veda D'Amore (2010; 2015a).

3D, immediatamente percepibile e riconoscibile al primo colpo d’occhio, e la sua rappresentazione 2D quasi fotografica. Ma il discorso interiore si fa interessante quando, dopo aver identificato immagine e oggetto rappresentato, al secondo colpo d’occhio l’osservatore legge la frase sottostante ed entra dunque nel gioco semiotico 2D/3D voluto dall’autore (è un perfetto esempio di un’opera nella quale non si deve solo guardare, ma anche leggere; tuttavia, anche la combinazione: sguardo/lettura non è sufficiente a capire il senso dell’operazione pittorica, se non ci sono ulteriori informazioni di tipo storico-critico-semiotico, queste ultime fornite dallo studio delle intenzioni dell’autore).

In altre opere dello stesso autore, nelle quali si propongono situazioni solo all’apparenza reali ma di fatto impossibili, ha senso la denominazione “surrealismo” (che, in arte, ha mille sfaccettature diverse); ma qui il discorso, potente e colto, è sull’interpretazione semiotica del linguaggio dell’arte, un continuo rimbalzo fra il rappresentato, il rappresentante, la percezione visiva, l’esperienza e la semiotica soggiacente. Rimbalzo nel quale ha un ruolo determinante quel linguaggio silenzioso (e personale) più volte ricordato.

A dimostrazione di ciò, citiamo un vero e proprio studio teorico di Magritte, il disegno/manifesto *Les mots et les images* (Magritte, 1929) che, pur essendo, come dicevamo, uno studio teorico, venne anch’esso esposto come opera.[4]

[4] Una profonda analisi di questo famoso disegno di Magritte, contenente la riproduzione di altre opere dello stesso pittore belga e con la riedizione di scritti teorici di Magritte, si trova in Lageira (2003).

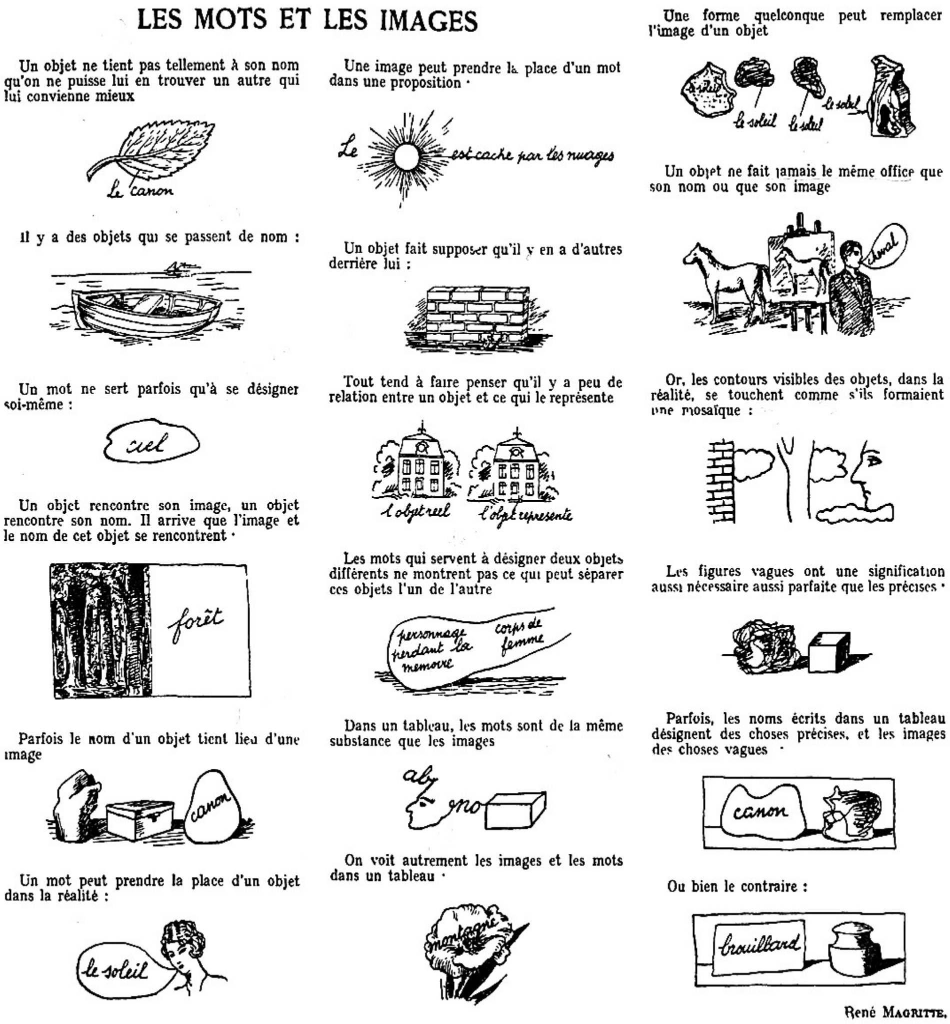

Figura 7. Les mots et les images, René Magritte. Immagine tratta dalla rivista *La Révolution Surréaliste*, dicembre 1929.

All'interno di questo studio, il particolare più famoso e perennemente discusso per il suo evidente riferimento a una delle tante versioni del cosiddetto "triangolo semiotico" (Eco, 1975) è quello relativo all'immagine del cavallo. Vi appare un cavallo (ovviamente disegnato, ma il senso è chiaro), una sua rappresentazione pittorica (su una tela poggiata su un cavalletto), una sua enunciazione verbale.

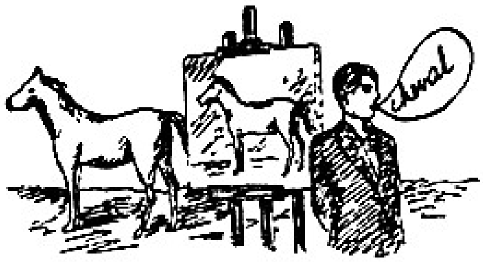

Figura 8. Les mots et les images, René Magritte, 1929. Particolare.

Questa analisi del linguaggio pittorico tramite una terna di riferimenti semiotici e le loro relazioni non può non richiamare alla mente l’opera del logico matematico tedesco Gottlob Frege (1892) che però analizzava il linguaggio logico della matematica. Ma su questo punto sorvoliamo, rimandando a D’Amore (2010, 2015a).

L’idea di Magritte ha avuto un lungo seguito (che ancora continua) tra gli artisti di tutto il mondo, specie tra coloro che, negli anni ’60–’80, sono stati gli artefici della corrente cosiddetta del “concettuale scientifico”, pur tra le sue molteplici sfaccettature (D’Amore & Menna, 1974; Menna, 1975; Di Genova, 1993). Fra i maggiori interpreti non solo del filone analitico, ma proprio di questa coincidenza fra l’arte figurativa esposta e l’analisi semiotica della coppia oggetto-rappresentazione, segnaliamo in ordine cronologico lo statunitense Joseph Kosuth e il francese Bernar Venet.

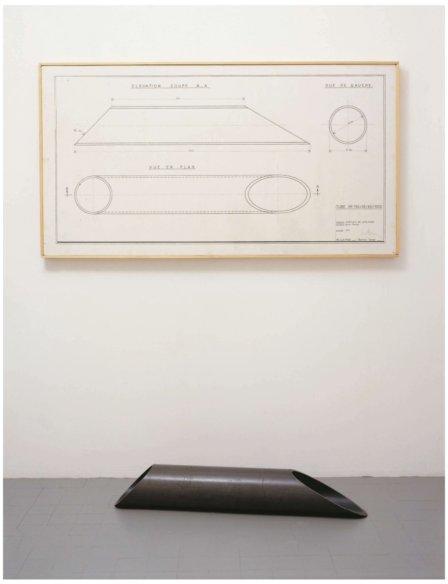

Figura 9. Tube n° 150/45/60/1000, Bernar Venet, 1966.

L’oggetto d’arte (quello messo in mostra) non è né il tubo concreto reale di metallo posto sul pavimento, né la sua rappresentazione assonometrica, disegnata su un foglio da disegno e messa in cornice, appesa sulla retrostante parete di una galleria d’arte. L’opera d’arte è puramente semiotica, l’emergente da un sistema di rappresentazioni e di trasformazioni che portano dall’una rappresentazione all’altra (D’Amore, 2015b).

L’identica operazione semiotica è contemporaneamente compiuta da Kosuth.

Figura 10. One and three chairs, Joseph Kosuth, 1965.

La stessa opera è stata ricreata da Kosuth decine di volte, con sedie diverse, dunque con foto diverse, ma sempre nella terna semiotica: oggetto reale, fotografia che riproduce l’oggetto, definizione di sedia tratta da un dizionario. Rappresentazioni (fotografia e definizione dell’oggetto) in registri distinti, conversioni semiotiche in atto. L’opera d’arte non è la terna visiva che cade sotto il nostro senso della vista, colta dallo sguardo, né alcuno di questi oggetti separatamente: è la relazione semiotica che ne emerge, l’obbligare l’osservatore a percepire con lo sguardo ogni elemento della terna, distinguendone le reciproche funzioni, far scattare un discorso silenzioso che connette ciascuno degli elementi agli altri.

Sull’interpretazione di queste opere dal punto di vista semiotico si veda anche Duval (2008).

Un’altra opera di Joseph Kosuth perfettamente aderente al nostro discorso è *Neon electrical light English glass letters white eight*, del 1966, che rappresenta, appunto, “neon electrical light English glass letters white eight” (Salomon Guggenheim Museum, New York); e ancora *Painting*, del 1966, che rappresenta, in una pittura, la definizione di “pittura”. (Anche queste opere sono state realizzate una molteplicità di volte, in molte versioni). Kosuth rappresenta perfettamente lo spirito di questa ricerca artistica, giocando sull’univocità di riferimento semantico, una sorta di monosemia che si oppone alla tipica polisemia che, da sempre, ha caratterizzato l’arte nel suo senso romantico. La sua opera complessiva di questo periodo si può riassumere nel suo progetto: *Art as Idea as Idea* (D’Amore, 2015a).

Dal nostro punto di vista, questi sono esempi, tratti dal mondo dell’arte, di come siano determinanti i rapporti (a volte in opposizione fra loro) fra quel che è offerto allo sguardo, l’emergenza oggettuale, il complesso riferimento semiotico, il profondo discorso interno personale silenzioso e l’interpretazione delle diverse componenti fra loro e poi di queste con il complesso dell’opera.

Questa complessità non è poi così diversa da certe situazioni determinate nelle aule scolastiche, durante le ore di geometria, quando diversi registri e diverse componenti interpretative si scontrano fra loro. Così come nell’opera di Kosuth relativa alle sedie ci sono implicite trasformazioni semiotiche di conversione, ciascuna delle quali accomuna due rappresentazioni in registri diversi che richiedono interpretazioni specifiche, lo stesso capita al momento di decifrare, intendere, decostruire figure che descrivono una situazione, per esempio relativamente ai diversi passaggi di una dimostrazione o, per esempio, quando si passa da una scrittura algebrica a una analitico-grafica cartesiana, come sembra anche suggerire questa opera di Venet, studiata in dettaglio in D’Amore (2015b).

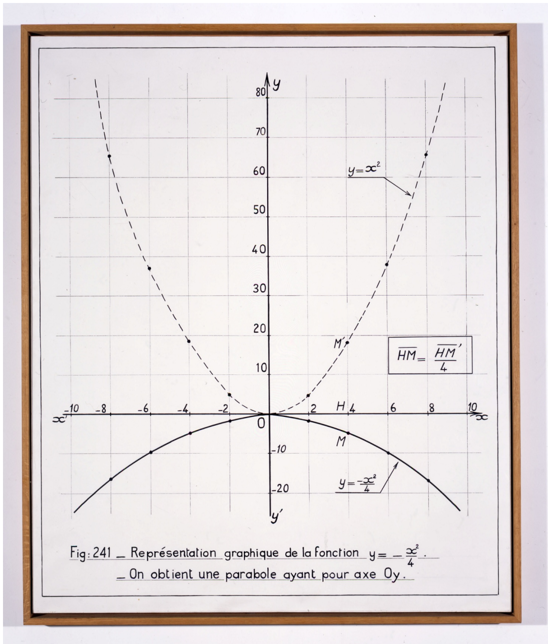

Figura 11. Représentation graphique de la fonction $y = -x^2/4$, Bernar Venet, 1966. Acrilico su tela, 146×121 cm. Musée National d’Art Moderne, Centre Pompidou, Paris, France.

In questa opera sono messe in evidenza tre rappresentazioni semiotiche di uno stesso oggetto matematico:

- nel registro analitico-grafico (un disegno nel piano cartesiano);
- nel registro algebrico (una formula);
- nel registro della lingua naturale: una descrizione a parole: “On obtient une parabole ayant pour axe Oy”.

Ma l’ambito di creazione è quello artistico, non una lezione di geometria, e in anni nei quali le riflessioni semiotiche (almeno in matematica) erano ancora al di là da venire …

Riferimenti bibliografici

Asenova, M. (2018). Vedere geometricamente: La percezione non iconica nella scuola primaria. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 173–210.

D’Amore, B. (2000). Oscar Reutersvärd. In A. Bonfiglioli & C. Valentini (Eds.), *Matematica, arte e tecnologia: da Escher alla computer* graphics (pp. xix–xxi). Bologna: Aspasia.

D’Amore, B. (2002). L’opera di Oscar Reutersvärd. *La matematica e la sua didattica*, *16*(3), 240–245.

D’Amore, B. (2005). Oscar Reutersvärd. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), *8*(3), 379–382.

D’Amore, B. (2010). Figurative arts and mathematics: Pipes, horses and meanings. In V. Capecchi, M. Buscema, P. Contucci, & B. D’Amore (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts: Mathematics and Society* (pp. 491–504). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

D’Amore, B. (2015a). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili.* Bari: Edizioni Dedalo.

D’Amore, B. (2015b). Bernar Venet: Elogio del processo razionale. *Nuova Meta*, 37, 30–41. Disponibile da: www.rivistaartenuovameta.it

D’Amore, B., & Menna, F. (1974). *De mathematica*. [Catalogo della mostra internazionale omonima]. Roma: Galleria dell’Obelisco.

Di Genova, G. (1993). *Storia dell’arte italiana del ’900*. Bologna: Bora.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l’apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–53.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture* (pp. 39–61). Rotterdam: Sense Publishers.

Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique: «voir» en géométrie. In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Figure* (pp. 147–182). Grenoble: Presses Universitaires.

Duval, R. (2018). Per l’educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura.

La matematica e la sua didattica, *26*(2), 211–245.
Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.
Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik,* 100, 25–50.
Lageira, J. (2003). *Magritte: Mots et images*. Paris: Gallimard.
Magritte, R. (1929). Les mots et les images. *La Révolution surréaliste*, *5*(1), 32–33.
Menna, F. (1975). *La linea analitica dell'arte moderna*. Milano: Einaudi.
Penrose, L. S., & Penrose, R. (1958). Impossible objects: A special type of visual illusion. *British Journal of Psychology*, *49*(1), 31–33.